§ 15. Заключительный

Фундаментальное решение и обобщенные функции

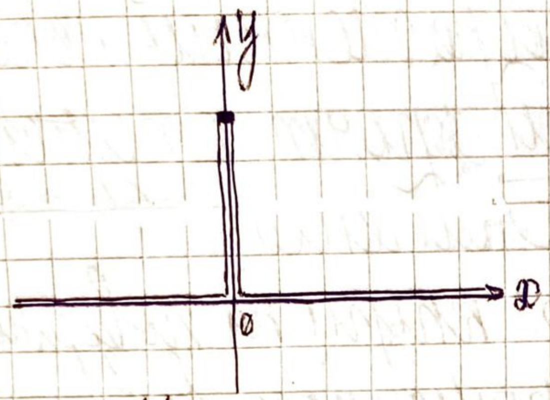
Часть I. Обобщенные ф-ции (распределенные ф-ции / distribution functions)

Дельта-ф-ция Дирака — $\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Св-ва:

1) $\delta(x) = 0$, $\forall x \neq 0$;
2) $\delta(0) = +\infty$;
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$.

Схематичное изображение $\delta(x)$:



Можно показать, что среди классических ф-ций такой объект невозможен. Но такая ф-ция очень полезна для мат. физики.

Идея: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ для $\forall$ достаточно хорошей ф-ции $\varphi(x)$

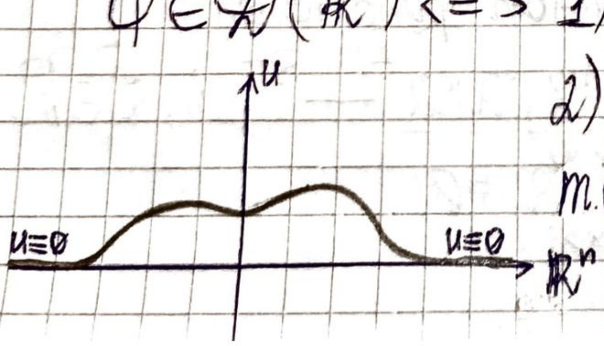
Теория Лорана Шварца

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$: $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пр-во пробных (финитных или основных) ф-ций

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$ 1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) $\varphi(x)$ — финитна в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\exists R = R(\varphi) > 0$: $\varphi(x) \equiv 0$ при $x > R$.



Основное определение. Линейный непрерывный функционал $f: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, называется обобщенной ф-цией в $\mathbb{R}^n$.

Обозначение: $(f, \varphi) = f(\varphi)$ – число, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Примеры обобщенных ф-ций

1) Регулярные об. ф-ции

Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – локально суммируемая ф-ция в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\int_\Omega |f(x)| dx < +\infty$ для $\forall$ огр. обл-ти $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

2) Сингулярные ф-ции

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

3) Сдвинутая δ-ф-ция

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ – фикс. точка: $(\delta_a, \varphi) = \varphi(a)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

4) Производная об. ф-ции f

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi\right) \stackrel{\text{def}}{=} -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Аналогия: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$

(интегрирование по частям)

Аналогично определяется производная $\forall$ порядков.

5) Лапласиан от δ-ф-ции

$(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta\varphi), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$

$(\Delta \delta, \varphi) = \Delta\varphi(0), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{\text{Часть II.}}$ Фундаментальное решение ур-я Лапласа.

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2, \\ -\frac{1}{(n-2)\underbrace{\omega_n}_{\text{площадь поверхности единичн. сферы в } \mathbb{R}^n}|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

$E(x) = E(r).$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$$

$\Delta E(x) = 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$

Фундаментальная ф-ла Грина:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}u(y) - E(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right]dS_y,$$

$x \in \Omega, \ \Omega \in \underbrace{(GO)}_{\text{огр. область}}, u \in C^2(\overline{\Omega})$

Специальная ситуация: $u(x) = \varphi(x)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $\Omega = B_{\varrho}^{(0)}$ (шар, (0) — центр, ϱ — радиус), где $\varrho > R(\varphi)$. Тогда:

$\int_{\partial\Omega} \ldots \equiv 0, \int_{\Omega} \ldots \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \ldots$

Тогда ф-ла Грина для финитных ф-ций приобретет вид:

$$\boxed{\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y-x)\Delta\varphi(y)\,dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n} \quad (*)$$

Часть III. Обобщ. ф-ции и фунд. решение ур-я Лапласа

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2, \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

$E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow E(x)$ — регуляр. обобщ. ф-ция в $\mathbb{R}^n$ ($\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta\varphi(y)\,dy$ сходится для $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)

Вопрос: $\Delta E = ?$ (в смысле теории обобщ. ф-ций)

Рассмотрим:

$(\Delta E, \varphi) \overset{def}{=} (E, \Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta\varphi(y)\,dy \overset{(*)}{=} \varphi(0) =$

$= (\delta, \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Значит $(\Delta E, \varphi) = (\delta, \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Вывод: $\boxed{\Delta E(x) = \delta(x) \text{ в } \mathbb{R}^n}$ (в смысле теории обобщ. ф-ций)

Общий подход: фунд. решением дифф. оператора в $\mathbb{R}^n$ наз-ся ф-ция, которая при подстановке в данный дифф. оператор, даёт $\delta(x)$.

Литература: Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. „Обобщ. ф-ции" (Том 1-3)

Приложение

Число $\omega_n = ?$

$\omega_n = \int_{|y|=1} dS_y = ?$ в $\mathbb{R}^n$

Формулы:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$ $(\equiv I)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \forall n \in \mathbb{N};$

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^\gamma e^{-t} dt = \gamma!, \forall \gamma \in (-1; +\infty)$

$(\gamma! = \Gamma(\gamma+1))$

Выкладка:

$$I^n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1\right) \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2} dx_n\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{+\infty} dr \int_{|y|=r} e^{-r^2} dS_y =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr \int\limits_{|y|=r} dS_y = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \omega_n r^{n-1} dr = \left\{ t = r^2 \Leftrightarrow r = t^{\frac{1}{2}};\ dr = \frac{dt}{2t^{1/2}} \right\} = \frac{\omega_n}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}} dt = \frac{\omega_n}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n-2}{2}} e^{-t} dt =$$

$$= \frac{\omega_n}{2} \left(\frac{n-2}{2}\right)!$$

С другой стороны, $I^n = \pi^{\frac{n}{2}}$

Значит $\frac{\omega_n}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)! = \pi^{\frac{n}{2}}$,

$$\boxed{\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}},$$

$$\boxed{\underbrace{\sigma_n}_{\text{объем шара}} = \frac{\omega_n}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\left(\frac{n}{2}-1\right)!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}}$$

При $n=1$: $\omega_1 = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 2$ — площадь нульмерной сферы на одномерной прямой

При $n=2$: $\omega_2 = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi$ — длина окружности

При $n=3$: $\omega_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)!} = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 4\pi$ — площадь единичной сферы